

# Laplacemuunnosten perusteet kurssilla S1; v.1.0

Jarmo Malinen

4. joulukuuta 2005

## Sisältö

1	Alkusanat	2
2	Määritelmiä	2
3	Laplace-muunnoksen ominaisuuksia	6
4	Sovellutus vakiokertoimisiin lineaarisiin differentiaaliyhtälöihin	9
5	Usein esiintyvien funktioiden Laplace-muunnoksia	11

# 1 Alkusanat

Laplace-muunnos on yksi arvokkaimpia signaalinkäsittelyn, säätöteorian ja piirianalyysin matemaattisista työkaluista. Sen avulla differentiaaliyhtälöillä, erityisesti alkuarvo-tehtävinä kuvattuja fysikaalisia tilanteita voidaan tarkastella algebrallisina yhtälöinä. Piirianalyysissa ja säätöteoriassa Laplace-muunnos johtaa lähes välittömästi siirtofunktio-tekniikoihin.

Tämä moniste on johdanto Laplace-muunnosmenetelmän käyttöön yksinkertaisimmissa tilanteissa. Sovellutuksena tarkastellaan vakiokertoimista lineaarista differentiaaliyhtälöä. Konvoluutiota, Diracin  $\delta$ -funktiota, viivästettyjen ja eksp. vaimennettujen funktioiden muunnoksia ja Laplace-muunnoksen käänteismuunnoskaavoja ei käsitellä. Materiaalin laajuus on 3 – 4 luentotuntia, ja se on tarkoitettu avuksi TKK:n kurssilla “Piirianalyysi II” tarvittavaan matematiikkaan. Moniste seuraa jossain määrin Martion ja Sarvaksen kirjassa “Tavalliset differentiaaliyhtälöt” olevaa suppeaa esitystä.

Monisteesta löytyvistä (varmasti lukuisista) virheistä pyydän ilmoittamaan sähköpostitse: jmalinen@math.tkk.fi.

Jarmo Malinen

## 2 Määritelmiä

Ennen kuin voimme määritellä Laplace-muunnoksen erään integraalin avulla, on tarpeen rajata se joukko funktioita, joille muunnoksen laskeminen on ylipäättään mahdollista.

**Määritelmä 1.** *Funktio  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  on Laplace-muuntuva<sup>1</sup> mikäli  $f$  on paloittain jatkuva, ja on olemassa vakio  $s > 0$  jolle*

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0.$$

*Lukua  $M_f = \inf\{s > 0 : \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0\}$  kutsutaan funktion  $f$  kasvurajaksi.*

Laplace-muuntuvan funktion  $f(t)$  kasvun (kun  $t \rightarrow \infty$ ) tulee siis “hävitä” eksponentti-funktiolle  $e^{-st}$  jollain äärellisellä, mahdollisesti hyvin isolla luvulla  $s > 0$ . Kaikki funktiot

---

<sup>1</sup>Laplace-muuntuvuudelle voidaan antaa paljon yleisempiäkin määritelmiä, joiden avulla useammille funktioille voidaan laskea Laplace-muunnos. Tällaiset yleistyksiset eivät kuitenkaan ole tämän monisteen aihepiirissä.

eivät toteuta tätä; esimerkkinä tästä  $g(t) = e^{t^2}$ . Erikoisesti jokainen rajoitettu, paloittain jatkuva funktio on Laplace-muuntuva “kuristusperiaatteen” nojalla: jos  $|f(t)| \leq M$  jokaisella  $t \geq 0$ , niin

$$|e^{-st}f(t)| \leq Me^{-st} \rightarrow 0 \text{ kun } t \rightarrow \infty.$$

Jokaisen rajoitetun funktion kasvuraja on aina  $= 0$ .

**Huomautus 2.** *Olkoon  $f$  Laplace-muuntuva, ja merkitään sen kasvurajaa  $M_f$ . Vaikka ehto (1) toteutuu tällöin jokaiselle  $s > M_f$  (välittömästi joukon infimumin eli suurimman alarajan määritelmän mukaan), ehto ei välttämättä toteudu kun  $s = M_f$ . Esimerkiksi funktio  $h(t) = e^{-s_1 t}$ , jolle pätee  $M_h = s_1$ .*

Laplace-muunnos määritellään eräällä epäoleellisella integraalilla, jossa funktiota joudutaan integroimaan koko positiivisen reaaliakselin  $\mathbb{R}_+$  yli. Paloittain jatkuvan funktion  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  epäoleellisen, joukon  $\mathbb{R}_+$  yli ulotetun integraalin  $\int_0^\infty g(t) dt$  sanotaan *olevan olemassa* eli *suppenevan*, mikäli raja-arvo on olemassa kaavassa

$$I = \lim_{M \rightarrow \infty} I_M \quad \text{jossa} \quad I_M := \int_0^M g(t) dt.$$

Tällöin merkitään epäoleellista<sup>2</sup> integraalia lyhyesti  $\int_0^\infty g(t) dt := I$ . Nyt voimme vihdoinkin määritellä Laplace-muunnoksen:

**Määritelmä 3.** *Olkoon  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  Laplace-muuntuva, ja merkitään sen kasvurajaa  $M_f$ . Tällöin*

(i)  *$f$ :n Laplace-muunnos on funktio  $\hat{f} : (M_f, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ , jonka arvot määräytyvät epäoleellisesta integraalista*

$$(2) \quad \hat{f}(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

(ii) *Laplace-muunnosoperaattori on kuvaus  $\mathcal{L} : f \mapsto \hat{f}$ , jossa  $f$  ja  $\hat{f}$  toteuttavat (2).*

Funktion  $f$  Laplace-muunnosta *funktiona* merkitään joko symbolilla  $\hat{f}$  tai  $\mathcal{L}[f]$ . Näiden funktioiden arvoja pisteessä  $s > M_f$  merkitään tällöin  $\hat{f}(s)$  tai  $\mathcal{L}[f](s)$ . Muuttujaa  $t$  on tapana kutsua *aikatason muuttujaksi* tai *aikaparametriksi*. Useissa tehtävissä se todellakin vastaa fysikaalista aikaa. Muuttujaa  $s$  kutsutaan *taajuustason muuttujaksi*, ja itse Laplace-muunnosoperaation  $\mathcal{L}$  sanotaan “insinöörikielillä” antavan yhteyden aikataason ja taajuustason välillä.

Lukija mieltä jää ehkä kalvamaan epäily siitä, onko epäoleellinen integraali (2) ylipäätään olemassa millään arvolla  $s > 0$ ; ja onko Määritelmä 3 ylipäätään varmallalla pohjalla. Onneksi Laplace-muuntuvuusehdon (1) toteutuessa epäoleellinen integraali suppenee:

---

<sup>2</sup>Vaikka jokainen  $\int_0^M g(t) dt$  on määritelty Riemann-integraalina, ei niiden raja-arvoa  $\int_0^\infty g(t) dt$  ole suoraan määritelty Riemannin ylä/alasummien avulla. Tämän takia raja-arvoa kutsutaan epäoleelliseksi integraaliksi.

**Lemma 4.** Olkoon  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  Laplace-muuntuva, ja merkitään sen kasvurajaa  $M_f$ . Tällöin epäoleellinen integraali (2) suppenee (itseisesti).

*Todistus.* Olkoon  $s > M_f$  mielivaltainen. Koska  $f$  on paloittain jatkuva ja funktio  $t \mapsto e^{-st}$ , on niinkään näiden funktioiden tulo  $t \mapsto e^{-st}f(t)$  paloittain jatkuva joukossa  $\mathbb{R}_+$ . Koska paloittain jatkuvat ovat Riemann-integroituvia jokaisella osavälillä  $[0, M]$ , jokainen Riemann-integraali  $I_M := \int_0^M e^{-st}f(t) dt$  on olemassa kun  $M \geq 0$ . Pitää siis tutkia, mitä tapahtuu luvuille  $I_M$  kun annetaan  $M \rightarrow \infty$ .

Vaaditun raja-arvon olemassaololle joudutaan käyttämään nk. Cauchyn konvergenssikriteeriä, jonka matemaattinen perustelu ohitetaan<sup>3</sup>. Cauchyn kriteerin mukaan  $\lim_{M \rightarrow \infty} I_M \in \mathbb{C}$  on olemassa, jos ja vain jos jokaisella  $\epsilon > 0$  on olemassa luku  $N = N(\epsilon) > 0$  siten että toteutuu

$$\min(M_1, M_2) > N(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad |I_{M_1} - I_{M_2}| < \epsilon.$$

Olkoon nyt  $\epsilon > 0$ , ja poimitaan jokin luku  $s_0 \in (M_f, s)$ . Sovitaan että luvuista  $M_1$  ja  $M_2$  suurempaa merkitään aina  $M_2$ :lla. Tällöin integraalilaskun säännöllä saadaan

$$(3) \quad |I_{M_2} - I_{M_1}| = \left| \int_0^{M_2} e^{-st}f(t) dt - \int_0^{M_1} e^{-st}f(t) dt \right| = \left| \int_{M_1}^{M_2} e^{-st}f(t) dt \right| \\ \leq \int_{M_1}^{M_2} |e^{-st}f(t)| dt = \int_{M_1}^{M_2} e^{-(s-s_0)t} |e^{-s_0t}f(t)| dt.$$

Koska  $f$  on Laplace-muuntuva ja  $s_0 > M_f$ , seuraa  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s_0t}f(t) = 0$ . Mutta nolnaan suppenevat funktiot  $\mathbb{R}_+$ :lla ovat selvästi rajoitettuja (yritä vaikkapa piirtää sellainen joka ei olisi!), ja on siis olemassa vakio  $C > 0$  jolle pätee  $|e^{-s_0t}f(t)| \leq C$  kaikilla  $t \geq 0$ . Nyt voidaan yllä olevaa epäyhtälöketjua jatkaa:

$$(4) \quad \int_{M_1}^{M_2} e^{-(s-s_0)t} |e^{-s_0t}f(t)| dt \leq C \int_{M_1}^{M_2} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{-C}{s-s_0} \Big|_{M_1}^{M_2} e^{-(s-s_0)t} \\ = \frac{C e^{-(s-s_0)M_1}}{s-s_0} (1 - e^{-(s-s_0)(M_2-M_1)}) \leq \frac{2C e^{-(s-s_0)M_1}}{s-s_0}.$$

Koska  $s - s_0 > 0$ , voidaan viimeisessä termissä lukua  $M_1 = \min(M_1, M_2)$  kasvattaa riittävän isoksi (eli  $> N(\epsilon)$ ), niin että lopulta tosiaankin toteutuu epäyhtälöistä (3) ja (4) johdettu – Cauchyn konvergenssikriteerin vahvistava – epäyhtälö

$$|I_{M_2} - I_{M_1}| \leq \frac{2C e^{-(s-s_0)M_1}}{s-s_0} < \epsilon.$$

Jätämme lukijalle tehtäväksi laskea logaritmien avulla lauseke luvulle  $N(\epsilon)$ , jokaista  $\epsilon > 0$  kohden. □

---

<sup>3</sup>Huomaa, että Cauchyn kriteeri on varsin järkevä: Jotta raja-arvo  $\lim_{M \rightarrow \infty} I_M$  voisi olla olemassa, on tarpeen että kaikki arvot  $I_{M_1}$  ja  $I_{M_2}$  ovat lähellä toisiaan, kunhan molemmat  $M_1, M_2$  ovat vain riittävän suuria.

**Huomautus 5.** Usein Laplacemuunnoksen  $\hat{f}(s)$  muuttujan  $s$  sallitaan olevan kompleksiluku, joka toteuttaa  $\operatorname{Re} s > M_f$ .

**Huomautus 6.** Usein funktion  $f$  tarkan kasvurajan  $M_f$  määrittäminen on vaikeaa. Käytännön laskujen kannalta on kuitenkin olennaista vain se, että äärellinen kasvuraja on olemassa jolloin myös Laplace-muunnos on olemassa. Tarvittavat laskut tehdään tällöin "kaikeilla riittävän isoilla luvuilla  $s > 0$ ", eikä ole niin nökönuukaa tietää kuinka isoilla luvuilla  $s > M_f$  oikeastaan lasketaan.

Käytännön esimerkki valaiskoon edellä olevaa teoreettista tarkastelua. Huomaa, että usein laskut on pakko tehdä kompleksitasossa.

**Esimerkki 7. Funktion  $e^{at}$  Laplace-muunnos, kun  $a \in \mathbb{R}$ .**

Ei ole epäilystä, etteikö eksponenttifunktio olisi Laplace-muuntuva. Itse laskukin on lähes naiivi:

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-(s-a)t} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} = \frac{1}{s-a},$$

kunhan  $s > a$ . (Varmista, että ymmärrät miksi!)

**Esimerkki 8. Funktion  $\sin t$  Laplace-muunnos.**

Tämä on jatkuva ja rajoitettu funktio, joten se on niinmuodoin Laplace-muuntuva; kasvurajan ollessa  $= 0$ . Olkoon  $s > 0$  mielivaltainen. Eulerin kaavan avulla, epäoleellista integraalia hieman epämuodollisesti käsitellen saadaan laskettua

$$\begin{aligned} (5) \quad \int_0^{\infty} e^{-st} \sin t dt &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}) dt = \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} e^{-(s-i)t} dt - \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} e^{-(s+i)t} dt \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(s-i)t}}{-(s-i)} - \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(s+i)t}}{-(s+i)}. \end{aligned}$$

Jotta sijoitustermi  $+\infty$ :ssä saadaan laskettua, tarvitaan raja-arvot  $\lim_{M \rightarrow \infty} e^{-(s \pm i)M}$  kullekin  $s > 0$ . Mikäli imaginääriyksikköä ei kaavassa lainkaan esiintyisi, nähtäisiin suoraan että haluttu raja-arvo on nolla, ja sofistikoitunut veikkaus olisi sama myös kompleksilukutapauksessa. "Kuristusperiaatteella" ja kompleksimuuttujan eksponenttifunktion laskusäännöillä saadaan

$$|e^{-(s \pm i)M}| = e^{\operatorname{Re}[-(s \pm i)M]} = e^{-sM} \rightarrow 0 \quad \text{kun } M \rightarrow \infty.$$

Siis sijoitustermit  $+\infty$ :ssä katoavat kaavassa (5), ja saadaan alarajatermeistä (huomaa miinusmerkki!)

$$\mathcal{L}[\sin](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin t dt = \frac{1}{2i} \left( -\frac{1}{-(s-i)} + \frac{1}{-(s+i)} \right) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

### Esimerkki 9. Funktion $\cos t$ Laplace-muunnos.

Kosinin Laplace-muunnos voidaan laskea suoraan sinin Laplace-muunnoksesta, käyttämällä kaavaa  $\cos t = \sin(\pi/2 - t)$  ja tekemällä integraalin sisällä muuttujan vaihto  $v = \pi/2 - t$ ,  $dv = -dt$ . Jätetään lukijalle helpoksi harjoitustehtäväksi, jonka tulos on  $\mathcal{L}[\cos](s) = \frac{s}{s^2+1}$ .

### Esimerkki 10. Askelfunktion Laplace-muunnos.

Paitsi siniaaltoja, usein signaaleina käytetään myös askelfunktiota

$$\chi_{[0,a]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t \in [0, a] \\ 0, & \text{kun } t > a. \end{cases}$$

Laplace-muunnos tulee suoralla laskulla kaikille  $s > 0$

$$\mathcal{L}[\chi_{[0,a]}](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \chi_{[0,a]}(t) dt = \int_0^a e^{-st} dt = \int_0^a \frac{e^{-st}}{-s} = \frac{1}{s} (1 - e^{-sa}).$$

## 3 Laplace-muunnoksen ominaisuuksia

Johdamme seuraavaksi Laplace-muunnosoperaation  $\mathcal{L}$  perusominaisuuksia, joiden takia siitä tulee käyttökelpoinen insinöörimatematiikan työkalu.

**Lause 11.** *Laplace-muunnosoperaatio  $\mathcal{L}$  on lineaarinen kuvaus, joka on määritelty kaikilla paloittain jatkuvilla funktioilla. Jatkuvien funktioiden joukkoon  $C(\mathbb{R}_+)$  rajoitettuna  $\mathcal{L}$  on lisäksi injektiivinen.*

*Perustelu.* Että  $\mathcal{L}$  on lineaarinen, seuraa suoraan (epäoleellisten) integraalien laskuominaisuuksista. Paloittain jatkuville funktioille  $f(t)$  ja  $g(t)$ , sekä vakioille  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  pätee<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \alpha \int_0^R e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^R e^{-st} g(t) dt \right) \\ &= \alpha \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} f(t) dt + \beta \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} g(t) dt = \alpha \mathcal{L}[f](s) + \beta \mathcal{L}[g](s). \end{aligned}$$

Yllä oleva lasku on oikea jokaiselle  $s > \max(M_f, M_g)$ . Erityisesti huomaa, että funktioiden kasvurajat aina toteuttavat epäyhtälön

$$M_{\alpha f + \beta g} \leq \max(M_f, M_g).$$

<sup>4</sup>On hyvää harjoitusta epäoleellisen integraalin laskusäännöille, jos käy edellisen päättelyketjun askel askeleelta, ajatuksen kanssa läpi.

Kuten matriisilaskussa matriisien nolla-avaruuksia tutkittaessa, injektiivisyyden tarkistamiseksi riittää osoittaa että jokainen Laplace-muuntuva *jatkuva* funktio  $f$ , jolle pätee

$$\mathcal{L}[f](s) = 0 \quad \text{kaikilla } s > M_f$$

on itse asiassa nollafunktio:  $f(t) = 0$  kaikilla  $t > 0$ . Valitettavasti tämän väitteen todistaminen vaatii edistyneempiä työkaluja, kuin tällä kurssilla voidaan esittää.  $\square$

Lineaarisuuden avulla voidaan antaa funktion  $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  Laplace-muunnos välittömästi, kunhan  $\hat{f}$  ja  $\hat{g}$  ovat tunnettuja. Mikäli taas  $\mathcal{L}$  ei olisi injektii-  
vinen, olisi useilla eri (jatkuvilla) funktiolla samat Laplace-muunnokset. Tämä tekisi Laplace-muunnostekniikan käyttökelvottomaksi, koska käänteismuunnoksen laskeminen olisi tällöin mahdotonta.

Usein aika-akselia halutaan venyttää tai kutistaa siten, että funktion  $f(t)$  sijasta halutaan tutkia funktiota  $f_a(t) := f(at)$ , jossa  $a > 0$  on vakio:

**Lause 12.** *Olkoon  $f$  Laplace-muuntuva ja  $a > 0$ . Tällöin funktio  $f_a(t) := f(at)$  on Laplace-muuntuva, ja sen muunnos toteuttaa*

$$\mathcal{L}[f_a](s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f] \left( \frac{s}{a} \right).$$

*Perustelu.* Tämä on harjoitus integraalilaskennon muuttujanvaihdosta: Jokaiselle  $s > \max(M_f, M_{f_a})$  pätee

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_a](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-s(\tau/a)} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-(s/a)\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f] \left( \frac{s}{a} \right), \end{aligned}$$

jossa muuttujanvaihtona<sup>5</sup> käytettiin  $\tau = at$ ,  $d\tau = a dt$ .  $\square$

**Esimerkki 13. Funktioiden  $\sin at$  ja  $\cos at$  Laplace-muunnokset, kun  $a > 0$ .**

Lausetta 12 soveltamalla Esimerkeissä 8 ja 9 annettuihin muunnoksiin, saadaan eritaajuisille sinivärähtelyille muunnoskaavat

$$\mathcal{L}[\sin at](s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}[\cos at](s) = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

Jotta differentiaaliyhtälöitä voitaisiin käsitellä Laplace-muunnoksin, tulee tietää kuinka derivointi vaikuttaa funktion Laplace-muunnokseen

---

<sup>5</sup>Mikäli yllä oleva olisi tehty matemaattisesti täsmällisemmin, olisi jokainen integraali laskettu ensin *oleellisena integraalina* välillä  $[0, R]$ , ja vasta lopuksi siirrytty epäoleelliseen integraaliin antamalla  $R \rightarrow \infty$ . Lauseen 11 todistuksessa näin jakesittiin vielä tehdä, mutta tästä eteenpäin fuskaamme hieman.

**Lause 14.** Jos  $f$  ja  $f'$  ovat Laplace-muuntuvia, niin tällöin  $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$ .

*Perustelu.* Tämä on epäoleellisen integraalin osittaisintegrointia. Jokaiselle  $s > \max M_{f'}, M_f$  pätee

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) - \int_0^{\infty} (-se^{-st})f(t) dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}[f](s)\end{aligned}$$

jossa osittaisintegroinnissa käytettiin sijoitusta  $U = e^{-st}$ ,  $dV = f'(t) dt$ ,  $dU = -se^{-st}$ , ja  $V = f(t)$ . Luku  $s$  on yllä olevassa laskussa kiinteä vakio, jota kohdellaan kuin mitä tahansa kompleksilukua – erityisesti sen voi tuoda ulos integraalimerkin alta. Tehdyn sijoituksen ylärajatermi  $\infty$ :ssä katoaa, koska  $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$  funktion  $f$  Laplace-muuntuvuuden perusteella.  $\square$

Huomaa, että funktio  $f$  voi aivan hyvin olla Laplace-muuntuva, ilman että sen derivaatta  $f'$  on. Esimerkiksi kelpaa rajoitettu, jatkuvasti derivoituva funktio  $f(t) = \sin e^{t^2}$ , jonka kasvuraja on  $M_f = 0$ . Sen derivaatta  $f'(t) = 2te^{t^2} \cos e^{t^2}$  kasvaa turhan monissa pisteissä nopeammin kuin mikään eksponenttifunktio – niinpä sillä ei ole äärellistä kasvurajaa. Yritä huviksesi kuvitella miltä tällainen funktio kuulostaisi kuulokkeista soitettuna.

**Esimerkki 15. Funktion  $\cos t$  Laplace-muunnos toisella tavalla laskettuna.**

Kosinin Laplace-muunnos voidaan laskea sinin Laplace-muunnoksesta käyttämällä hyväksi tietoa  $\frac{d \sin t}{dt} = \cos t$ . Saadaan suoraan Lauseen 14 perusteella

$$\mathcal{L}[\cos](s) = s\mathcal{L}[\sin](s) - \sin 0 = s \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - 0 = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Korkeampien derivaattojen tapaus voidaan hoitaa soveltamalla Lausetta 14 useasti peräkkäin:

**Korollaari 16.** Jos funktiot  $f, f', \dots, f^{(n)}$  ovat Laplace-muuntuvia, niin tällöin

$$(6) \quad \mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0).$$

Jokainen derivaatoista (Korollaarin oletusten ollessa voimassa)  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  on itseasiassa jatkuva funktio (miksi?). Korkeimman kertaluvun derivaatalta  $f^{(n)}$  riittää vaatia, että se on ainoastaan paloittain jatkuva.

*Korollaarin perustelu tapauksessa  $n = 2$ .* Käyttämällä Lausetta 14 kaksi kertaa saadaan jokaiselle  $s > \max(M_f, M_{f'}, M_{f''})$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''](s) &= s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s(s\mathcal{L}[f](s) - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

Ken vielä epäilee yleistä kaavaa (6) vääräksi, ruoskikoon itseään induktioidistuksella tai laskemalla auki tapaukset  $n = 3, n = 4 \dots$  kunnes sielunrauha on saavutettu.  $\square$

Funktion  $f(t)$  derivoiminen  $n$  kertaa kertoo siis Laplace-muunnoksen  $\hat{f}$  funktiolla  $s^n$ , mikäli unohdetaan  $n - 1$  asteinen polynomihäiriö  $\sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0)$ , joka tulee sijoitus-termeistä. Integroiminen aiheuttaa luonnollisesti päinvastaisen ilmiön:

**Lause 17.** *Olkoon  $f(t)$  jatkuva, Laplace-muuntuva funktio, ja määritellään sen eräs antiderivaatta  $F(t) = \int_0^t f(v) dv$ . Tällöin  $F$  on Laplace-muuntuva, ja jokaiselle  $s > \max(M_f, M_F)$  pätee*

$$\mathcal{L}[F](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s).$$

*Perustelu.* Integraalilaskennon päälauseen mukaan  $F'(t) = f(t)$  jokaisella  $t > 0$ . Koska lisäksi  $F(0) = 0$  tällä nimenomaisella antiderivaatalla, saadaan Lauseen 14 avulla

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[F'](s) = s\mathcal{L}[F](s) - F(0) = s\mathcal{L}[F](s).$$

Jakamalla yhtälön pää ja häntä muuttujalla  $s$  saadaan väite todistetuksi. □

## 4 Sovellutus vakiokertoimisiin lineaarisiin differentiaaliyhtälöihin

Tarkastelemme vaimentamattoman jousimassasysteemin (tai LC-piirin) analyysiä edellä kuvatulla Laplace-muunnostekniikalla. Oletetaan, että kuormatekijänä on sinimuotoinen värähtely, jolloin alkuarvotehtävä voi olla esimerkiksi muotoa

$$(7) \quad \begin{cases} x''(t) + 4x(t) = \sin t & \text{kun } t > 0, \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0. \end{cases}$$

Olkoon nyt  $x(t)$  alkuarvotehtävän yksikäsitteinen ratkaisu, joka voitaisiin löytää esimerkiksi vakioidenvariointitekniikalla. Merkitään lyhyemmin  $\hat{x}(s) = \mathcal{L}[x](s)$  kaikilla riittävän suurilla  $s > 0$ ; tehdään se (vasta myöhemmin oikeaksi osoittautuva) oletus, että ratkaisu  $x(t)$  derivaattoineen on Laplace-muuntuva. Käyttämällä hyväksi annettuja alkuehtoja, saadaan Korollarin 16 perusteella

$$\mathcal{L}[x''](s) = s^2 \hat{x}(s) - sx_0 - v_0.$$

Laplace-muunnoksen lineaarisuuden perusteella (ks. Lause 11) voidaan differentiaaliyhtälö alkuarvotehtävästä (7) muuntaa seuraavasti:

$$(8) \quad \begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}[x'' + 4x - \sin](s) = \mathcal{L}[x''](s) + 4\hat{x}(s) - \mathcal{L}[\sin](s) \\ &= (s^2 + 4) \hat{x}(s) - sx_0 - v_0 - \frac{1}{s^2 + 1}, \end{aligned}$$

jossa viimeisellä rivillä on käytetty Esimerkissä 8 johdettua kaavaa sinifunktion Laplace-muunnokselle. Koska yhtälö (8) pätee kaikille  $s > M$  jollain luvulla  $M > 0$ , voidaan ratkaista

$$(9) \quad \hat{x}(s) = \frac{sx_0 + v_0}{s^2 + 4} + \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \quad \text{kaikilla } s > M.$$

Alkuarvotehtävän (7) ratkaisu edellyttäisi nyt funktion  $\hat{x}(s)$  käänteis-Laplace-muuntamista, joka osoittautuu olevan tämän menetelmän työläin askel. Usein tulee käyttää valmiita Laplace-muunnostaulukoita “käänteiseen suuntaan” taitavasti ja luovasti termejä ryhmitellen.

Tutkitaanpa, kuinka yhtälöstä (9) päätellään funktion  $x(t)$  muoto. Alkuehtojen määräämä termi  $\frac{sx_0+v_0}{s^2+4}$  yhtälössä (9) voidaan onneksi esittää helposti kombinaationa “venytetyn” sinin ja kosinin Laplace-muunnoksista (ks. Lause 12 ja Esimerkki 13): kaikille  $s > 0$  pätee nimittäin

$$(10) \quad \frac{sx_0 + v_0}{s^2 + 4} = x_0 \cdot \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{v_0}{2} \cdot \frac{2}{s^2 + 4} \\ = x_0 \mathcal{L}[\cos 2t](s) + \frac{v_0}{2} \mathcal{L}[\sin 2t](s) = \mathcal{L}\left[x_0 \cos 2t + \frac{v_0}{2} \sin 2t\right](s).$$

Jälkimmäinen, differentiaaliyhtälön epähomogeenisuudesta johtuva termi yhtälössä (9) vaatii enemmän kekseliäisyyttä. Se ei ole suoraan sinin ja kosinin Laplace-muunnosten näköinen, mutta rationaalifunktioiden integraalilaskennosta tutun osamurtolukukehitelmän avulla se voidaan saattaa muotoon

$$\frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{A}{s^2 + 1} + \frac{B}{s^2 + 4}$$

eräillä vakioilla  $A$  ja  $B$ . Ristiinkertomalla saadaan yhtälö  $(A + B)s^2 + (4A + B) = 1$ , joka toteutuu kaikilla  $s > 0$  vain jos  $A + B = 0$  ja  $4A + B = 1$ . Ratkaisemalla saadaan  $A = 1/3$  ja  $B = -1/3$ . Niinpä

$$(11) \quad \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{1/3}{s^2 + 1} - \frac{1/3}{s^2 + 4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{s^2 + 4} \\ = \frac{1}{3} \mathcal{L}[\sin t](s) - \frac{1}{6} \mathcal{L}[\sin 2t](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin 2t\right](s),$$

joka pätee kaikilla  $s > 0$ .

Yhdistämällä yhtälöt (10) ja (11) yhtälöön (9) saadaan

$$\hat{x}(s) = \mathcal{L}\left[x_0 \cos 2t + \frac{v_0}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin 2t\right](s) \quad \text{kaikilla } s > M.$$

Koska kahdella eri *jatkuvalla* funktiolla ei voi olla samaa Laplace-muunnosta (Lauseen 11 injektiivisyysväitteen takia) ja yhtälön (7) ratkaisu on jopa kahdesti derivoituva. Siksi edellisestä yhtälöstä voidaan “kuoria pois” Laplace-muunnosoperaatio  $\mathcal{L}$ , ja saadaan

$$x(t) = x_0 \cos 2t + \left(\frac{v_0}{2} - \frac{1}{6}\right) \sin 2t + \frac{1}{3} \sin t$$

kaikilla  $t > 0$ . Tämä on alkuarvotehtävän (7) etsitty ratkaisu, joka on (rajoitettuna, jatkuvana funktiona) Laplace-muuntuva. Niinpä jokainen edellä tehty askel oli itseasiassa matemaattisesti oikea, ja lukuna  $M$  olisi voitu käyttää  $M = 0$  (paitsi, että laskujen ollessa keskeneräisiä emme sitä vielä siinä vaiheessa tienneet).

**Huomautus 18.** Useissa insinöörisovellutuksissa ei alkuperäiselle funktiolle  $x(t)$  ole käyttöä, vaan laskuissa voidaan jo pysähtyä helposti saavutettuun yhtälöön kuten (10). Tällöin kaikki tehtävän vaatima analyysi tehdään Laplace-muunnoksen puolella, ns. taajuusalue-tekniikoilla (engl. frequency domain techniques).

**Huomautus 19.** Monimutkaisemmat ja korkeampiasteiset tapaukset käsitellään samalla tavalla kuin edellä annettu esimerkki. Käänteismuunnoksessa vaaditut teknilliset vaiheet ovat kuitenkin monimutkaisempia.

**Huomautus 20.** Laplace-muunnoksella voidaan myös käsitellä vektoriarvoisia yhtälöitä  $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$ , mutta tarvittavat yleistyksiset eivät enää ole näiden luentojen aihepiirissä.

## 5 Usein esiintyvien funktioiden Laplace-muunnoksia

Funktio $f(t), t \geq 0$	Laplace-muunnos $\hat{f}(s)$ ja sen määrittelyjoukko
1	$\frac{1}{s}$ kun $s > 0$
$e^{ax}$	$\frac{1}{s-a}$ kun $s > \max(0, a)$
$\sin bx; \quad b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$ kun $s > 0$
$\cos bx; \quad b \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$ kun $s > 0$
$x^n; \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ kun $s > 0$
$x^n e^{ax}; \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ kun $s > \max(0, a)$
$e^{ax} \sin bx; \quad a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$ kun $s > 0$
$e^{ax} \cos bx; \quad a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$ kun $s > 0$ .

Laaajempia taulukoita löytyy mm. ammattikirjallisuudesta ja erikoisfunktioita käsittelevien kirjojen liitteinä.