1 Fourier-sarjat

Huom: Tämä moniste sisältää Fourier-sarjojen teorian perusteet. Esimerkkejä ja kuvitusta on tarkoitus lisätä seuraavaan versioon. Painovirheistä kannattaa ilmoittaa osoitteeseen pekka.alestalo@tkk.fi.

Fourier-sarjojen avulla voidaan analysoida jaksollisia ilmiöitä kvantitatiivisesti.

Esimerkki 1.1 a) Vahvistimeen syötetään sini-muotoinen jaksollinen signaali, joka on muotoa $b\sin(\omega t)$. Ulos tuleva signaali ei kuitenkaan ole enää tarkasti ottaen sini-muotoa $B\sin(\omega t)$. Miten siis määritellään oikea vahvistuskerroin ja miten voidaan kvantitatiivisesti tutkia vahvistimen virheellisyyttä eli ns. harmonista säröä?
b) Nastarengas synnyttää vieriessään jaksollisen äänen, joka riippuu renkaan kuvioinnista ja nopeudesta. Miten voidaan laskennallisesti analysoida kuvion vaikutusta renkaan äänekkyyteen ja estää pahimmat resonanssit? (Tehtävä: Vertaile kesä- ja talvirenkaiden kuviointia; huomaat, että talvirengaskuvio on (yleensä) monimutkaisempi ja sillä on pidempi jakso.)

1.1 Jaksolliset funktiot

Määritelmä 1.2 Funktio $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on jaksollinen, jos on olemassa sellainen luku $p \neq 0$, että $f(x+p) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Tällaiset luvut p ovat funktion f jaksoja.

Jos p on funktion f jakso, niin myös np on jakso, kun $n \in \mathbf{Z}$. Funktiolla ei siis koskaan ole suurinta eikä pienintä jaksoa, mutta usein on olemassa pienin positiivinen jakso $p > 0$. Tällaista kutsutaan funktion perusjaksoksi.

Esimerkki 1.3 a) Funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ perusjakso on 2π. Tämä oletetaan tunnetuksi.
b) Jos $k > 0$, niin funktioiden $\sin(kx)$ ja $\cos(kx)$ perusjakso on $2\pi/k$. Myöhemmin tarvittavien muotoa $\sin(\pi x/L)$, $\cos(\pi x/L)$ olevien funktioiden perusjakso on siis $2L$.
c) Määritelmän mukaan vakiofunktio on jaksollinen, mutta sillä ei ole perusjaksoa.
d) Jokainen rationaaliluku $q \neq 0$ on funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

jakso, mutta sillä ei ole perusjaksoa.

Jaksollisella funktiolla täytyy määritelmän mukaan olla jokin arvo kaikissa reaaliakselin pisteissä. Käytännössä funktioilla kuvataan myös epäjatkuvia ilmiöitä, jolloin niiden arvot hyppäyskohdissa saattavat olla epämääräisiä. Matemaattisesti tilanne voidaan korjata määrittelemällä epäjatkuvuuskohtien arvot jaksollisuuden vaatimalla tavalla, mutta osoittautuu, ettei tällä ole kovin suurta merkitystä. Usein funktion arvo epäjatkuvuuskohdassa kannattaa valita sen hyppäyksen puolivälistä.

Jos jaksollinen funktio on derivoituva, niin sen derivaattakin on jaksollinen. Integraalifunktiolle tämä ei päde, mutta siihen liittyy seuraava ominaisuus.

Lause 1.4 *Jos funktiolla f on jakso $p > 0$ ja f on integroituva välillä $[0, p]$, niin kaikilla $a \in \mathbf{R}$ on voimassa*

$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx.$$

Kaavan sisältöä voi havainnollistaa ajattelemalla integroimista pinta-alan laskemisena. Tarkempi todistus saadaan esimerkiksi derivoimalla kaavan vasen puoli muuttujan a suhteen, jolloin tuloksena on nolla. Vasen puoli on siis a:n suhteen vakio, ja sen arvo saadaan sijoittamalla $a = 0$. Kaavan perustelu voidaan tehdä myös sopivien muuttujanvaihtojen avulla.

Käsittelemme jatkossa usein mm. 2π-jaksollisten funktioiden integraaleja jaksovälin yli. Lauseen perusteella nämä voidaan siis laskea esimerkiksi välillä $[-\pi, \pi]$ tai yhtä hyvin välillä $[0, 2\pi]$.

Fourier-sarjojen teoriassa jaksollinen funktio pyritään esittämään alkeellisempien sin/cos-muotoisten komponenttiensa avulla. Kyseessä olevan teorian pani alulle Joseph Fourier v. 1822, mutta jo häntä ennen Brook Taylor (1713) ja Daniel Bernoulli (1755) olivat havainneet seuraavan aaltoyhtälön ratkaisuihin liittyvän ilmiön.

Esimerkki 1.5 Osittaisdifferentiaaliyhtälö $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ on 1-ulotteinen aaltoyhtälö, jonka ratkaisu $u = u(x, t)$ kuvaa esim. välillä $0 \le x \le \pi$ olevan jännitetyn kielen värähtelyjen poikkeamaa tasapainosta pisteessä x hetkellä t, kun vaaditaan $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ kaikilla t.

Taylor esitti, että jos kielen muotoa hetkellä $t = 0$ kuvaa funktio $\sin x$, niin ajasta riippuvan amplitudin $\cos(ct)$ avulla saadaan yhtälölle ratkaisu $u_1(x, t) = \cos(ct)\sin(x)$, jolle siis $u_1(x, 0) = \sin x$ ja $u_1(0, t) = u_1(\pi, t) = 0$ kaikilla t. Tällainen ratkaisu kuvaa kielen ensimmäistä ominaisvärähtelyä, jossa sen jokainen piste värähtelee harmonisesti samalla taajuudella.

Seuraava ominaisvärähtely liittyy alkutilaan $\sin(2x)$, jolloin vastaava ratkaisu on $u_2(x, t) = \cos(2ct)\sin(2x)$, ja yleisesti alkutilaa $\sin(kx)$ vastaa ratkaisu $u_k(x, t) = \cos(kct)\sin(kx)$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$.

Bernoullin lisähavainto oli seuraava. Koska aaltoyhtälö on lineaarinen, niin ratkaisut toteuttavat superpositioperiaatteen: eri ratkaisuista muodostettu lineaarikombinaatio on edelleen ratkaisu, ts. funktio

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{n} b_k \cos(kct)\sin(kx)$$

toteuttaa sekä yhtälön että reunaehdot $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ kaikilla mahdollisilla kertoimilla b_n. Koska tämä ratkaisu vastaa alkuehtoa

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$$

niin herää ajatus: jos yleinen alkutila $u(x, 0)$ voitaisiin esittää sarjamuodossa

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

sopivilla kertoimilla b_k, niin kaava

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(kct) \sin(kx)$$

kertoisi kielen muodon aikakehityksen kaikilla $t \geq 0$.

Taylorin ja Bernoullin ideat jäivät vuosikymmeniksi unohduksiin, sillä ne olivat liian epämääräisiä ja lisäksi ns. d'Alembertin ratkaisun $u(x,t) = f(x-ct)+g(x+ct)$ keksimisen jälkeen aaltoyhtälöä pidettiin jo ratkaistuna.

Vasta Joseph Fourier pystyi v. 1822 selittämään, kuinka kertoimet b_k voidaan laskea suoraan alkutilan $u(x,0)$ avulla, ja esitti kyseessä oleville sarjoille muitakin sovelluksia.[1]

Näitä Fourier-sarjoiksi kutsuttavia esityksiä käsitellään seuraavissa kappaleissa tarkemmin.

1.2 Fourier-sarjan reaalinen ja kompleksinen muoto

Lähdetään liikkeelle yksinkertaisimmasta tapauksesta, jossa funktio $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on 2π jaksollinen. Jos $n \geq 2$, niin 2π ei ole enää funktioiden $\sin(nx)$, $\cos(nx)$ perusjakso, mutta nämä ovat kuitenkin 2π-jaksollisia. On siis luonnollista olettaa, että funktion f Fourier-sarjassa esiintyy kaikkia näitä komponentteja. Edellisen luvun johdatteluun nojaten kysytään, onko mahdollista valita kertoimet a_n, b_n niin, että

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \tag{1}$$

olisi voimassa koko reaaliakselilla tai ainakin mahdollisimman monissa pisteissä?

Vakio a_0 on termin $a_0 \cos(0 \cdot x)$ sievennetty muoto, mutta kerrointa b_0 ei esiinny lainkaan, koska $\sin(0 \cdot x) = 0$ kaikilla x. **Joissakin kirjoissa vakiotermi kirjoitetaan muodossa $a_0/2$, mikä vaikuttaa kaikkiin kerrointa a_0 koskeviin lausekkeisiin.**

Osoittautuu, että *mikäli* tällainen esitys on olemassa, niin kertoimille a_n, b_n voidaan johtaa melko yksinkertaiset integraalilausekkeet. Lisäksi näiden kertoimien avulla muodostettu sarja suppenee useimmissa pisteissä kohti alkuperäisen funktion arvoa $f(x)$, jos f on riittävän säännöllinen. Seuraavassa kappaleessa johdetaan kerrointen lausekkeet, mutta se on yllättäen helpompaa tehdä kompleksisen Fourier-sarjan avulla, joten selvitämme ensin ym. mainitun reaalisen Fourier-sarjan yhteyttä vastaavaan kompleksiseen muotoon.

Eulerin kaavasta seuraa, että $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ ja $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ kaikilla $t \in \mathbf{R}$. Näiden avulla saadaan

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx},$$

kun $n \geq 1$. Jos siis määritellään

$$c_n = \begin{cases} a_0, & n = 0, \\ \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & n \geq 1, \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), & n \leq -1, \end{cases} \tag{2}$$

[1] Fourier keksi myös mm. kasvihuoneilmiön v. 1824, ts. julkaisi ensimmäisen laskennallisen arvion siitä, kuinka ilmakehän koostumus vaikuttaa maanpinnan lämpötilaan.

niin reaalinen sarja voidaan kirjoittaa tiiviissä kompleksisessa muodossa

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Itse asiassa kerrointen välinen yhteys on hieman yksinkertaisempi toiseen suuntaan: Eulerin kaavan mukaan

$$c_{\pm n} e^{\pm inx} = c_{\pm n}(\cos(nx) \pm i \sin(nx)),$$

joten arvoilla $n \geq 1$ pätee

$$c_{-n} e^{-inx} + c_n e^{inx} = (c_n + c_{-n}) \cos(nx) + i(c_n - c_{-n}) \sin(nx).$$

Näin ollen $a_0 = c_0$ ja

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}), \end{cases}$$

kun $n \geq 1$. Seuraavassa kappaleessa lasketaan ensin kertoimet c_n, jonka jälkeen reaaliset kertoimet saadaan suoraan näiden kaavojen avulla.

1.3 2π-jaksollinen Fourier-sarja

Tässä kappaleessa johdetaan 2π-jaksollisen funktion Fourier-sarjan kertoimet. Koska tarkastelemme aluksi kompleksista muotoa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

on syytä selvittää tällaisen sarjan ominaisuuksia.

Määritelmä 1.6 Olkoot $z_n \in \mathbf{C}$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}$. Sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n$ suppenee, jos sarjat $\sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ ovat molemmat suppenevia. Alkuperäisen sarjan summa on tällöin näiden kahden sarjan summa.

Erityisesti on huomattava, ettei suppenemista määritellä vaatimalla pelkästään raja-arvon

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} z_n$$

olemassaolo. Esimerkiksi termeistä $z_n = n$ muodostetulle sarjalle on

$$\sum_{n=-N}^{N} z_n = (-N) + (-N+1) + \cdots + (-1) + 0 + 1 + \cdots + (N-1) + N = 0$$

kaikilla N, joten raja-arvokin on 0. Periaatteessa suppenemisen käsite voitaisiin laajentaa myös tällaisiin tapauksiin, mutta silloin useat sarjojen yleiset ominaisuudet (suppenemistestit jms.) eivät enää ole voimassa.

Seuraavaksi johdamme kerrointen c_n lausekkeet, jos 2π-jaksolliselle funktiolle f on voimassa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{3}$$

Menetelmä perustuu integrointiin, jonka vuoksi palautetaan mieleen seuraavat määritelmät: jos $f(t) = u(t) + iv(t)$ on yhden reaalimuuttujan kompleksiarvoinen funktio, niin

$$f'(t) = u'(t) + iv'(t) \quad \text{ja} \quad \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

olettaen kaikkien lausekkeiden olevan määriteltyjä.

Tämän perusteella nähdään, että

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi, & n = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx + i\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,dx = 0, & n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0. \end{cases}$$

Tulos on kätevä kirjoittaa ns. Kroneckerin δ-symbolin avulla, joka määritellään kaavalla

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Tämän avulla saadaan $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx = 2\pi\delta_{n,0}$. Kroneckerin symbolin tärkeimmät ominaisuudet ovat

$$\sum_n a_n\delta_{n,k} = a_k, \quad \sum_{n,k} a_{nk}\delta_{n,k} = \sum_n a_{nn}, \quad \delta_{n-k,0} = \delta_{n,k}.$$

Olkoon $k \in \mathbf{Z}$. Kerrotaan kaava (3) puolittain lausekkeella e^{-ikx} ja integroidaan yhtälön molemmat puolet välillä $[-\pi, \pi]$. Tulokseksi saadaan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot 2\pi\delta_{n-k,0} = 2\pi c_k.$$

Johtopäätös on siis seuraava: jos kaava (3) on voimassa ja sarja suppenee niin hyvin, että sitä voi integroida termeittäin, niin kertoimille pätee

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{4}$$

Edellisen kappaleen kaavojen perusteella saadaan heti myös reaaliset kertoimet

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, & (5) \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, & (6) \end{aligned}$$

kun $n \geq 1$, ja

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \tag{7}$$

on funktion keskiarvo jaksovälillä.[2]

Määritelmä 1.7 Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ paloittain jatkuva ja 2π-jaksollinen. Tällöin kaavan (4) antamat luvut ovat funktion f kompleksiset Fourier-kertoimet ja kaavojen (5)-(7) määräämät luvut sen (reaaliset) Fourier-kertoimet.

Kertoimia a_n ja b_n kutsutaan myös Fourier-sini- ja -kosini-kertoimiksi. Kaikki kertoimet voidaan määritellä samoilla kaavoilla myös kompleksiarvoiselle funktiolle f.

Esimerkki 1.8 Lasketaan Fourier-sini-kertoimet 2π-jaksolliselle funktiolle $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, jolle

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0 \text{ tai } \pm\pi. \end{cases}$$

Koska kyseessä on paloittain määritelty funktio, niin määritelmässä esiintyvä integraali täytyy laskea kahdessa osassa:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-1) \cdot \sin(nx) + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) \\
&= \frac{1}{n\pi} \Big/_{-\pi}^{0} \cos(nx) + \frac{1}{n\pi} \Big/_{0}^{\pi} (-\cos(nx)) \\
&= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(-n\pi) + (-\cos(n\pi) + 1)) = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi},
\end{aligned}$$

sillä $\cos(-n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$.

Olemme siis saaneet Fourier-kertoimille konkreettiset lausekkeet. Yllä olevasta päättelystä ei kuitenkaan seuraa, että kaava (1) olisi voimassa. Tähän liittyy kaksi kysymystä: Jos paloittain jatkuvan funktion Fourier-kertoimet lasketaan ym. kaavoilla, niin

- millä muuttujan x arvoilla vastaava Fourier-sarja suppenee?
- millä muuttujan x arvoilla vastaava Fourier-sarja suppenee kohti lukua $f(x)$?

Mikäli vastausta kysymyksiin ei tiedetä, on yhtäsuuruusmerkin käyttäminen kaavassa (1) hieman ongelmallista. Sen vuoksi käytetään myös merkintää

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

[2] Jaksollisuuden vuoksi kaikki integraalit voidaan laskea myös välillä $[0, 2\pi]$.

ilmaisemaan sitä, että oikealla puolella esiintyvät kertoimet on laskettu funktion f Fourier-kertoimina, mutta kaavan vasen ja oikea puoli eivät välttämättä ole yhtäsuuria eikä sarjan tarvitse edes olla suppeneva.

Yllä oleviin kysymyksiin vastaaminen osoittautui yllättävän hankalaksi. Esimerkkinä mainittakoon, että on olemassa jatkuvia 2π-jaksollisia funktioita, joiden Fourier-sarja hajaantuu jokaisessa pisteessä. Historiallisessa mielessä kysymyksillä on ollut huomattava vaikutus koko matemaattisen analyysin kehitykseen, mutta käytännön tarpeisiin vastannee seuraava tulos.

Lause 1.9 *Olkoon* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *paloittain jatkuva ja* 2π*-jaksollinen.*
(i) Kaikki funktion f *Fourier-kertoimet lähestyvät nollaa, kun* $|n| \to \infty$.
(ii) Jos f *on lisäksi paloittain jatkuvasti derivoituva, niin sen Fourier-sarja suppenee kaikissa pisteissä kohti lukua* $\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+))$, *joka on jatkuvuuskohdassa* $f(x)$, *mutta sijaitsee epäjatkuvuuskohdassa funktion hyppäyksen puolivälissä.*

Todistus: Perustelemme vain lauseen ensimmäisen kohdan. Koska $e^{-i\pi} = -1$, niin

$$c_n = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-in(x+\pi/n)}\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y-\pi/n)e^{-iny}\,dy$$

muuttujanvaihdon $y = x + \pi/n$ perusteella, sillä integroimisväliä ei tarvitse jaksollisuuden perusteella muuttaa. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
|c_n| &= \frac{1}{2}|c_n + c_n| = \frac{1}{4\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(x-\pi/n))e^{-inx}\,dx\right| \\
&\le \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - f(x-\pi/n)|\,dx.
\end{aligned}$$

Koska integroitava funktio on paloittain jatkuva ja lähestyy nollaa jokaisessa pisteessä x, kun $|n| \to \infty$, niin suppiloperiaatteen mukaan $\lim_{|n|\to\infty} c_n = 0$. Väite seuraa tästä myös reaalisille kertoimille. $\square$

Jälkimmäisen osan todistuksen sijasta katsotaan vain esimerkkinä, kuinka Fourier-kerrointen käyttäytyminen liittyy funktion säännöllisyyteen.

Jos nimittäin f on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva ja 2π-jaksollinen, niin osittaisintegroimalla kahdesti saadaan

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi}\,\Big/_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx) - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\,\Big/_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx) - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx \\
&= -\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx,
\end{aligned}$$

sillä sijoitustermit katoavat jaksollisuuden vuoksi. Olkoon $c = \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|\,dx =$ vakio, jolloin kaikilla n on voimassa $|a_n| \le c/n^2$. Tämän perusteella saadaan arvio $|a_n\cos(nx)| \le c/n^2$, joten majoranttiperiaatteen nojalla vastaava Fourier-sarjan osa suppenee kaikilla x.

Lauseen ensimmäistä kohtaa voidaan käyttää esim. jaksollisen signaalin sisältämän informaation approksimointiin. Sen sijaan, että pitäisi tallentaa kaikki funktion arvot (mikä on mahdotonta!), valitaan sen Fourier-kertoimista ainoastaan ne, jotka ovat itseisarvoltaan tietyn rajan yläpuolella. Vastaava Fourier-sarjan osasumma approksimoi tällöin alkuperäistä signaalia, jonka sisältämä informaatio voidaan siis tietyissä virherajoissa tiivistää äärelliseen lukujonoon.

1.4 Funktioiden kohtisuoruus ja koko

Fourier-sarjan kerrointen lausekkeet johdettiin periaatteella, joka on erikoistapaus funktioiden kohtisuoruudesta. Koska samaa menetelmää voidaan käyttää myös mm. signaalin koon määrittämiseen, käsittelemme asiaa lyhyesti erikseen.

Käytetty ominaisuus perustui kaavaan

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\overline{e^{ikt}}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}\,dt = 0,$$

jos n, k ovat erisuuria kokonaislukuja. Jos kahdelle 2π-jaksolliselle funktiolle f ja g määritellään

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt, \tag{8}$$

niin ehto tulee muotoon $(e^{int}, e^{ikt}) = 0$. Lauseketta (8) kutsutaan funktioiden sisätuloksi, ja se yleistää vektoreiden pistetulon ääretönulotteiseen tapaukseen. Jos funktioiden sisätulo on nolla, voimme siis puhua niiden kohtisuoruudesta.

Lisäksi voidaan määritellä

$$||f|| = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \geq 0,$$

mikä vastaa vektorin pituuden laskemista ääretönulotteisessa tapauksessa, ja sitä kutsutaan funktion f normiksi. Signaalinkäsittelyyn liittyvissä sovelluksissa $||f||$ kuvaa signaalin f suuruutta ja lausekkeella $||f-g||$ voidaan mitata kahden signaalin välistä poikkeamaa.

Erityisesti Fourier-sarjalle

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

saadaan ominaisuutta $(e^{ikt}, e^{int}) = 2\pi\delta_{kn}$ ja kaavoja (2) käyttämällä

$$||f||^2 = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$

joka tunnetaan Parsevalin kaavan nimellä. Myös tästä kaavasta seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Todettakoon, että reaaliset Fourier-kertoimet voidaan johtaa suoraan (eli ilman kompleksista välivaihetta) käyttämällä funktioiden

$$\{1, \cos(nt), \sin(nt) \mid n \geq 1\}$$

kohtisuoruusominaisuuksia, mutta siihen ei ole enää tarvetta palata.

Parsevalin kaavaa voidaan käyttää myös eräiden sarjojen summaamiseen seuraavalla tavalla.

Esimerkki 1.10 Funktio

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = n\pi,\ n \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

voidaan jatkaa 2π-jaksolliseksi, jolloin sen Fourier-sarjan nollasta poikkeavat kertoimet ovat $b_{2n-1} = 4/\pi(2n-1)$. Koska

$$||f||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\pm 1)^2\, dt = 2\pi,$$

niin Parsevalin kaavan mukaan

$$2\pi = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(2n-1)} \right)^2,$$

josta saadaan

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

1.5 Fourier-sarjan derivoiminen ja integroiminen

Termeittäin derivointi tai integrointi ei vaikuta potenssisarjan suppenemissäteeseen, mutta Fourier-sarjojen kohdalla tilanne on toinen. Yleisesti voidaan sanoa, että derivointi heikentää Fourier-sarjan suppenemista, kun taas integrointi nopeuttaa sitä. Tämä on suora seuraus kaavoista

$$(a_n \cos nx)' = -na_n \sin nx, \quad (b_n \sin nx)' = nb_n \cos nx$$

ja niitä vastaavista integrointisäännöistä. Historiallista mielenkiintoa on ns. Weierstrassin funktiolla

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(4^n x),$$

joka on jatkuva koko reaaliakselilla, muttei derivoituva yhdessäkään pisteessä! Tähän viittaa myös se, että termeittäin derivoimalla saadun Fourier-kosini-sarjan kertoimet $4^n/2^n = 2^n$ kasvavat hyvin nopeasti (vaikka kaikki välissä olevat kertoimet ovatkin nollia), ja itse asiassa termeittäin derivoitu sarja hajaantuukin kaikilla muuttujan arvoilla x.

1.6 $2L$-jaksollinen Fourier-sarja

Siirrytään sitten tutkimaan yleisen jaksollisen funktion Fourier-sarjaa. Perinteisistä syistä jakson pituus kirjoitetaan muodossa $2L$; tällöin esimerkiksi integrointi jaksovälin yli voidaan tehdä välillä $[-L, L]$.

Yleinen Fourier-sarja voidaan johtaa käytännössä samalla periaatteella kuin edellä, mutta se voidaan myös palauttaa 2π-jaksolliseen tapaukseen seuraavalla tavalla.

Tarkastellaan $2L$-jaksollista funktiota $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Määritellään uusi funktio $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kaavalla $g(y) = f(Ly/\pi)$, jolloin g on 2π-jaksollinen:

$$g(y + 2\pi) = f(L(y + 2\pi)/\pi)) = f(Ly/\pi + 2L) = f(Ly/\pi) = g(y).$$

Funktion g Fourier-sarja on siis muotoa

$$g(y) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(ny) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(ny),$$

missä

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(Ly/\pi)\,dy = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, &(9)\\
a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\cos(ny)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(Ly/\pi)\cos(ny)\,dy\\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\pi x/L)\,dx, &(10)\\
b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\sin(ny)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(Ly/\pi)\sin(ny)\,dy\\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(n\pi x/L)\,dx &(11)
\end{aligned}$$

muuttujanvaihtojen $y = \pi x/L$ jälkeen. Tällöin siis

$$f(x) = g(\pi x/L) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/L) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L),$$

missä kertoimilla on lausekkeet (9)-(11). Tämä on $2L$-jaksollisen funktion Fourier-sarja. Vastaava kompleksinen muoto on

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L},$$

missä

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx$$

kaikilla $n \in \mathbf{Z}$.

Fourier-sarjojen suppenemiseen liittyvät ominaisuudet ovat yleisessä tapauksessa samat kuin 2π-jaksollisille funktioille.

1.7 Parillisen ja parittoman funktion Fourier-sarja

Funktio $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on parillinen, jos $f(-x) = f(x)$ kaikilla x, ja pariton, jos $f(-x) = -f(x)$ kaikilla x. Nimitys johtuu siitä, että potenssifunktio $f(x) = x^n$ on parillinen/pariton täsmälleen silloin, kun n on parillinen/pariton. Parillisia funktioita ovat esimerkiksi $\cos(kx)$, $\cos(2x) - 3x^4$ ja $x\sin(3x)$, ja parittomia esim. $\sin(kx)$, $2\sin(3x) - x$ ja $x\cos(2x)$.

Suurin osa funktioista ei ole kumpaakaan tyyppiä, mutta ne voidaan yksinkertaisella tempulla jakaa parilliseen ja parittomaan osaan. Jos nimittäin $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, niin pätee

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)),$$

jossa $f_+(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ on parillinen ja $f_-(x) = \frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$ on pariton.

Tällä ominaisuudella on suora yhteys Fourier-sarjoihin: parillisen osan Fourier-sarja kostuu cos-termeistä ja parittoman osan Fourier-sarja pelkistä sin-termeistä. Lisäksi $2L$-jaksollinen pariton tai parillinen funktio määräytyy kokonaan, jos se tunnetaan vain jaksovälin puolikkaalla $[0, L]$. Tämä ilmenee myös seuraavasta lauseesta.

Lause 1.11 *Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ paloittain jatkuva ja $2L$-jaksollinen.*
(i) Jos f on parillinen, niin sen Fourier-kertoimille pätee $b_n = 0$ kaikilla $n \geq 1$, ja

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\pi x/L)\,dx,\ \ n \geq 1.$$

(ii) Jos f on pariton, niin $a_n = 0$ kaikilla $n \geq 0$, ja

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)\,dx,\ \ n \geq 1.$$

TODISTUS: Lause todistetaan käyttämällä funktion parillisuutta tai parittomuutta Fourier-kertoimien kaavoissa. $\square$

Tämän vuoksi parillisen funktion Fourier-sarjaa kutsutaan Fourier-kosini-sarjaksi, ja parittoman funktion sarjaa Fourier-sini-sarjaksi.

Palataan lyhyesti alussa esitettyyn johdattelevaan esimerkkiin, jossa tutkittiin aaltoyhtälön ratkaisemista. Ongelman matemaattinen puoli voidaan tiivistää siihen, että välillä $[0, L]$ määritelty jatkuva funktio f, joka toteuttaa reunaehdot $f(0) = f(L) = 0$, pitäisi pystyä esittämään Fourier-sini-sarjana, jonka avulla aaltoyhtälön ratkaisu saadaan. Jos funktio f jatketaan koko reaaliakselille L-jaksollisena, sen Fourier-sarjassa esiintyy kuitenkin yleensä myös cos-termejä, joita ei haluta tässä tilanteessa mukaan. Kuinka tämä voidaan välttää?

Ratkaisu on seuraava: jos f jatketaan ensin parittomuusehdon $f(-x) = -f(x)$ vaatimana välille $[-L, L]$ ja sen jälkeen koko reaaliakselille $2L$-jaksollisena, niin tämä uusi funktio on pariton ja sen Fourier-sarjassa esiintyy vain sin-termejä. Tällä tavalla alkuperäinen välillä $[0, L]$ määritelty funktio saadaan oikealla tavalla esitetyksi Fourier-sini-sarjana. Kyseinen Fourier-sarja on tosin määritelty koko reaaliakselilla, mutta sovelluksessa tarvitaan vain esitystä välillä $[0, L]$.

Vastaavalla periaatteella voidaan välillä $[0, L]$ määritellylle funtiolle muodostaa Fourier-kosini-sarja, kun se jatketaan parilliseksi $2L$-jaksolliseksi funktioksi ja kehitetään Fourier-sarjaksi. Näissä molemmissa tilanteissa kannattaa käyttää valmiiksi johdettuja Fourier-kerrointen kaavoja parittomille tai parillisille funktioille, koska integrointi suoritetaan alkuperäisen funktion määrittelyvälin $[0, L]$ yli.

1.8 Fourier-sarjojen sovelluksia

1.8.1 Signaalin approksimointi

Tarkastellaan alussa mainittua signaalin vahvistamiseen liittyvää esimerkkiä. Oletetaan, että vahvistimeen syötetään 2π-jaksollinen signaali $b \sin t$, ja ulostuleva signaali on pariton 2π-jaksollinen funktio $f(t)$. Miten määritellään vahvistimen vahvistuskerroin ja virheellisyys?

Jos ulostuleva signaali on pariton, niin

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt),$$

ja vain sarjan ensimmäinen termi on toivottua muotoa. On siis luonnollista määritellä vahvistuskertoimeksi b_1/b ja käyttää virheen mittaamiseen sarjan loppuosan suuruutta alkuperäiseen amplitudiin verrattuna. Parsevalin kaavan mukaan sarjan toisen jäännöstermin suuruus on verrannollinen sarjan $\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2$ summaan, ja sen vuoksi vahvistimen harmoninen särö määritellään lausekkeella

$$\frac{1}{b^2} \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2.$$

Konkreettisena esimerkkinä tarkastellaan tilannetta, jossa vahvistin tuottaa 2π-jaksollisesta signaalista $\sin t$ parittoman 2π-jaksollisen sahalaita-signaalin, jolle

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \pi/2, \\ \pi - t, & \pi/2 \le t \le \pi. \end{cases}$$

Tämän Fourier-sini-kertoimeksi laskettiin aikaisemmin

$$b_n = \frac{4 \sin(n\pi/2)}{\pi n^2},$$

jolloin $b_{2k} = 0$ ja $b_{2k-1} = 4 \cdot (-1)^{k+1}/\pi(2k-1)^2$ kaikilla k. Vahvistuskerroin on siis $(4/\pi)/1 = 4/\pi \approx 1.27$ ja harmoninen särö

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k-1)^4} = \frac{16}{\pi^2}\left(\frac{\pi^4}{96} - 1\right) \approx 0.024.$$

1.8.2 Poisson'n kaava

Fourier-sarjojen avulla voidaan myös johtaa kiekossa määritellyn harmonisen funktion integraaliesitys sen reuna-arvojen avulla. Tämä esitys on nimeltään Poisson'n kaava.

Tarkastellaan siis origokeskisessa R-säteisessä kiekossa Laplace-yhtälöä $\Delta u = 0$ reunaehdolla $u(x, y) = g(x, y)$, kun $x^2 + y^2 = R^2$ ja g on jatkuva. Kiertosymmetrian vuoksi kannattaa käyttää napakoordinaatteja (r, φ), jolloin tehtävänä on ratkaista funktio $U(r, \varphi) = u(r \cos\varphi, r \sin\varphi)$ osittaisdifferentiaaliyhtälöstä

$$U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\varphi\varphi} = 0 \tag{12}$$

reunaehdolla $U(R,\varphi) = g(R\cos\varphi, R\sin\varphi) = f(\varphi)$.

Koska funktio f on 2π-jaksollinen, niin sillä on Fourier-sarja

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}.$$

Sama pätee myös funktioille $\varphi \mapsto U(r,\varphi)$ jokaisella kiinteällä $r \in [0,R]$, joten tuntuu luonnolliselta etsiä ratkaisua muodossa

$$U(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{in\varphi}.$$

Reunaehto tulee tällöin muotoon $c_n(R) = c_n$ kaikilla n.

Sijoitetaan tällaista muotoa oleva yrite yhtälöön (12), jolloin sievennysten jälkeen saadaan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(c_n''(r) + \frac{1}{r} c_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} c_n(r) \right) e^{in\varphi} = 0.$$

Tämä toteutuu, jos $c_n''(r) + \frac{1}{r}c_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}c_n(r) = 0$ kaikilla n, ts. kun $r^2 c_n''(r) + r c_n'(r) - n^2 c_n(r) = 0$. Kyseessä on Euler-tyyppinen differentiaaliyhtälö, joka ratkeaa yritteellä $c_n(r) = r^\alpha$, jossa $\alpha = \alpha_n$. Sijoitus johtaa yhtälöön

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0 \Longleftrightarrow \alpha^2 = n^2,$$

joten yleinen ratkaisu on muotoa $c_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}$. Ratkaisussa ei kuitenkaan voi esiintyä muuttujan r negatiivisia potensseja, koska funktion U täytyy olla jatkuva myös origossa. Tämä ehto rajaa mahdolliset ratkaisut muotoon $c_n(r) = D_n r^{|n|}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Muotoa

$$U(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n r^{|n|} e^{in\varphi}$$

oleva funktio on siis harmoninen R-säteisessä kiekossa, ja jäljelle jää reunaehdon tutkiminen. Tämä johtaa ehtoon

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n R^{|n|} e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi},$$

joka toteutuu valitsemalla $D_n = c_n / R^{|n|}$. Kun ratkaisuun sijoitetaan vielä Fourier-kertoimen lauseke (4), niin lopputulos voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} U(r,\varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{in\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{in(\varphi - t)}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, \varphi - t)\, dt, \qquad (13) \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned}
P(r,\psi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{|n|} e^{in\psi} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{re^{i\psi}}{R}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{re^{-i\psi}}{R}\right)^n \\
&= 1 + \frac{re^{i\psi}/R}{1 - re^{i\psi}/R} + \frac{re^{-i\psi}/R}{1 - re^{-i\psi}/R} \\
&= \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\psi + r^2} \qquad (14)
\end{aligned}$$

on nimeltään Poisson-ydin.

Osoittautuu, että yllä olevassa integraalimuodossa Fourier-sarjojen suppenemiseen liittyvät ongelmat katoavat, ja seuraava tulos on voimassa.

Lause 1.12 *Olkoon $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ jatkuva ja $f(0) = f(2\pi)$. Tällöin kaavoilla (13) ja (14) määritelty funktio U on harmoninen R-säteisessä kiekossa B ja sen raja-arvo jokaisessa reunapisteessä $Re^{i\varphi}$ on $f(\varphi)$.*

Erityisesti origossa saadaan

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B} f\, ds.$$

Tulos tunnetaan harmonisten funktioiden keskiarvoperiaatteen nimellä, sillä se pätee kaikille harmonisille funktioille muodossa "harmonisen funktion arvo jokaisen määrittelyalueeseen sisältyvän kiekon keskipisteessä on sama kuin funktion keskiarvo kiekon reunaympyrän yli". Tämä tulos seuraa myös Cauchyn integraalikaavasta, kun se jaetaan reaali- ja imaginaariosiin.